Лекция 8

Функции Эрмита

Ссылки. Многочлены Эрмита ортогональны на всей числовой оси с весом $p(x) = e^{-x^2}$, и определяются формулой

$$H_n(x) = (-1)^n \, e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \, e^{-x^2}. \tag{4}$$

Иногда рассматриваются другие многочлены Эрмита, определяемые формулами

$$H_n^*(x) = (-1)^n \, e^{-x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \, e^{-x^2/2}; \; H_n^*(x) = 2^{-n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Так как для $H_n(x)$ верны равенства

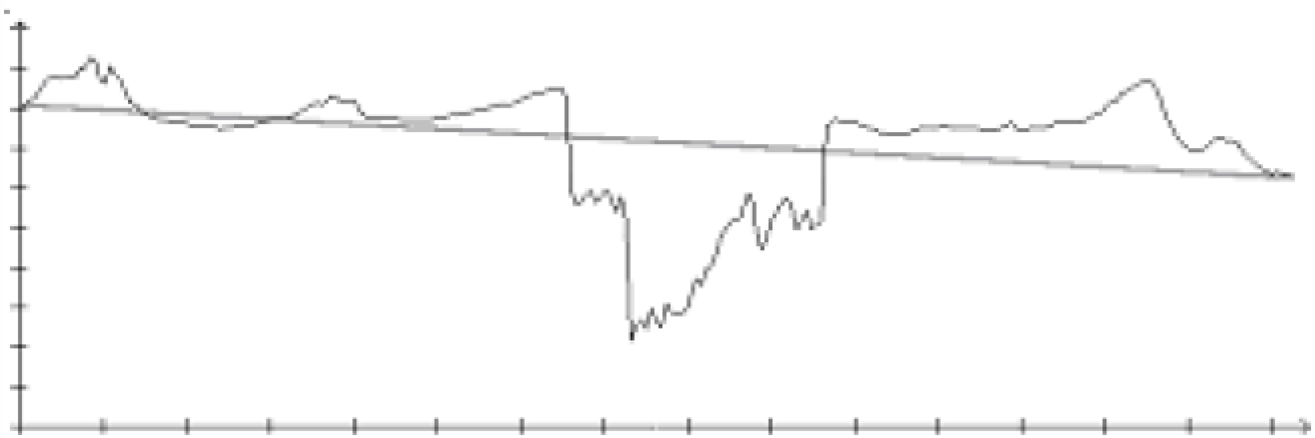
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ 2^n \sqrt{\pi} n! & \text{при } m = n, \end{cases}$$

ортонормированную систему образуют многочлены

$$h_n(x) = \frac{H_n(x)}{2^{n/2}(n!)^{1/2}\pi^{1/4}}.$$

Базовые линии. Для каждой линии исходного изображения мы вычитаем вычисленную базовую линию из исходных данных и центруем результат относительно оси градаций. Таким образом, если мы имеем изображение $I[j,i]$, $i = 0\dots width$, $j = 0\dots height$, то тогда базовые линии можно определить как

$$baseline_j(i) = I[j,0] + \frac{I[j,width] - I[j,0]}{width} \cdot i.$$



Базовая линия (толстая линия) и исходная линия (тонкая линия) для $j = 30$.

Теперь полученное изображение готово для дальнейшей обработки.

Аппроксимированные линии. На этом этапе, во-первых, мы должны выбрать число функций Эрмита для фильтрации. Далее мы растягиваем наш отрезок аппроксимации $[-A_0, A_0]$ до отрезка $[-A_1, A_1]$, определенного по следующему критерию:

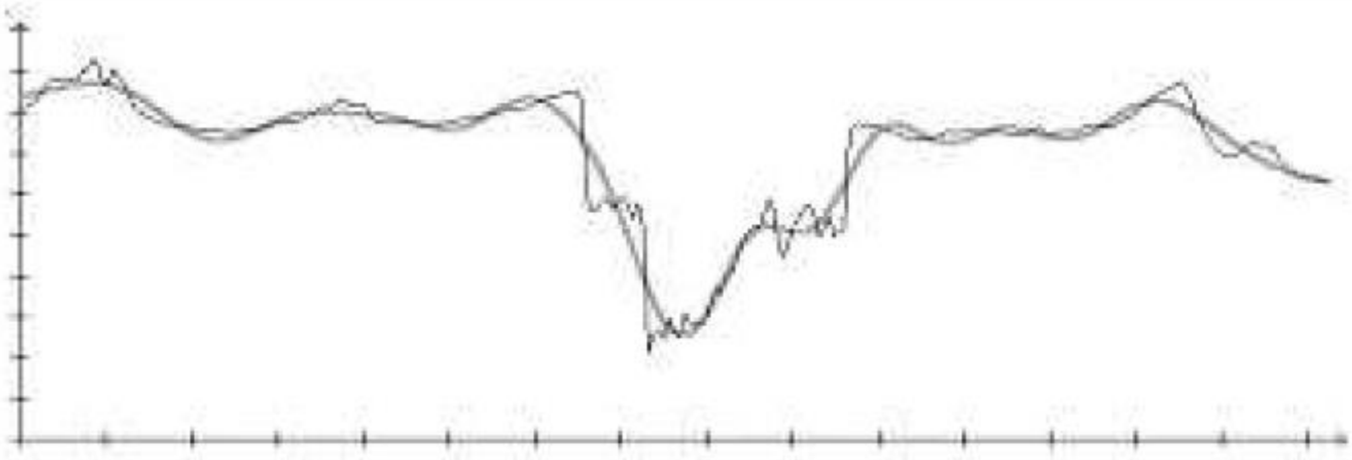
$$\int_{-A_1}^{A_1} \varphi_n^2(x)\, dx = 0.99,$$

где n—число функций Эрмита, используемых для аппроксимации. Потом мы раскладываем функцию $f(x)$, полученную при вычитании базовой линии из j-уровня исходного изображения, в ряд Фурье:

$$value(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \varphi_i(x)$$

$$c_i = \int_{-A_1}^{A_1} f(x)\varphi_i(x)\, dx.$$

Так как функции Эрмита являются собственными функциями преобразования Фурье, то мы получаем и аппроксимацию преобразования Фурье для j-уровня исходного изображения.



Аппроксимированная линия (толстая линия) и исходная линия (тонкая линия) для $j = 30$ для 20 функций Эрмита.

"Функции Эрмита—ортогональная система собственных функций преобразования Фурье."

Преобразование Фурье можно рассматривать как линейный ограниченный оператор F, отображающий $L^2(\mathbb{R})$ в себя. Найдем базис пространства, состоящий из собственных функций оператора F. Для этой цели заметим, что уравнение

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - x^2 f = \mu f \tag{1}$$

переводится преобразованием Фурье в такое же уравнение (предполагается, что неизвестная функция f удовлетворяет соответствующим условиям гладкости и убывания на бесконечности), поскольку операция $\dfrac{d^2}{dx^2}$ переходит в умножение на $-\lambda^2$, а умножение на $-x^2$—в операцию $\dfrac{d^2}{d\lambda^2}$. Поэтому естественно искать собственные функции F как решения уравнения (1). Будем искать решения этого уравнения, имеющие вид $f = w\, e^{-x^2/2}$, где w—многочлен. Подставив это выражение в (1), получим для w уравнение

$$w'' - 2xw' = (\mu + 1)w.$$

Полагая $w = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, получаем равенство

$$(2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2}) - \\ - 2x(a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}) = \\ = (\mu + 1)(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, находим, что

$$k(k-1)a_k - 2(k-2)a_{k-2} = (\mu+1)a_{k-2}. \tag{2}$$

Поскольку $a_n \neq 0$, должно быть $\mu = -(2n+1)$, и $a_{n-1} = 0$. Все коэффициенты многочлена w определяются из (2) с точностью до постоянного множителя. Таким образом, мы получаем рекуррентную формулу: $a_{k-2} = \dfrac{k(k-1)}{2k-2n-4} a_k$ (если a_n задано). Отсюда формула для w:

$$w_n(x) = a_n \left(x^n - \frac{n(n-1)}{4} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 8} x^{n-4} - \ldots \right).$$

Итак, мы построили систему функций вида $\varphi_n(x) = w_n(x)\, e^{-x^2/2}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Ясно, что каждая из этих функций принадлежит $L^2(\mathbb{R})$ благодаря множителю $e^{-x^2/2}$. Докажем ортогональность системы. Согласно (1) имеем

$$\varphi_n''(x) - x^2\varphi_n(x) = -(2n+1)\varphi_n(x),$$
$$\varphi_m''(x) - x^2\varphi_m(x) = -(2m+1)\varphi_m(x).$$

Умножив первое из этих равенств на φ_m, а второе на $-\varphi_n$, и складывая их, получим

$$[\varphi_n'\varphi_m - \varphi_m'\varphi_n]' = 2(m-n)\varphi_n\varphi_m.$$

Если $n \neq m$, то интегрируя это равенство, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_m(x)\, dx = \frac{1}{2(m-n)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\varphi_n'\varphi_m - \varphi_m'\varphi_n]'\, dx =$$

$$= \frac{1}{2(m-n)} [\varphi_n'\varphi_m - \varphi_m'\varphi_n]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Таким образом, ортогональность доказана.

Каждый из элементов φ_n полученной ортогональной системы представляет собой многочлен степени n, умноженный на $e^{-x^2/2}$. Следовательно, ее элементы должны (с точностью до числовых множителей) совпадать с функциями Эрмита. Покажем теперь, что функции $\{\varphi_n\}$ являются собственными функциями преобразования Фурье:

$$F\varphi_n = c_n\varphi_n. \tag{3}$$

Это вытекает из следующих фактов:
1). Уравнение (1) инвариантно относительно преобразования F.
2). Уравнение (1) при каждом n имеет, с точностью до постоянного множителя, лишь одно решение вида $P_n(x)\, e^{-x^2/2}$, где P_n—многочлен степени n.
3). Преобразование Фурье переводит $x^n\, e^{-x^2/2}$ в $\left(i\dfrac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2} = Q_n(x)\, e^{-x^2/2}$, где Q_n—многочлен степени n (проверяется по индукции). Из равенства (3) следует, что при каждом целом k

$$F^k\varphi_n = c_n^k\varphi_n.$$

Но преобразование Фурье, примененное четырежды, переводит каждую функцию в себя, умноженную на $4\pi^2$. Поэтому $c_n^4 = 4\pi^2$, т.е. c_n может принимать лишь значения $\pm\sqrt{2\pi}$ и $\pm i\sqrt{2\pi}$.
Итак, преобразование Фурье F в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ есть линейный оператор, который в базисе, состоящем из функций Эрмита, записывается как диагональная матрица с элементами вида $\pm\sqrt{2\pi}$ и $\pm i\sqrt{2\pi}$.

"Теорема Сонина. Поведение функций Эрмита."

Теорема Сонина. Если функция $u(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на сегменте $[a,b]$ и удовлетворяет там уравнению

$$u'' + \varphi(t)u = 0, \tag{1}$$

в котором функция $\varphi(t)$ положительна и непрерывно дифференцируема в интервале (a,b), причем ее производная $\varphi'(t)$ положительна (отрицательна), то относительные максимумы величины $|u(t)|$ убывают (возрастают) при возрастании t от a до b.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $\nu(t) = u^2(t) + \dfrac{1}{\varphi(t)}[u'(t)]^2$.

В экстремальных точках функции $u(t)$ выполняется условие

$$\nu(t) = u^2(t). \tag{2}$$

Далее, учитывая уравнение (1), получаем равенство

$$\nu'(t) = 2u(t)u'(t) + \frac{2u'(t)u''(t)}{\varphi(t)} - \frac{\varphi'(t)}{\varphi^2(t)}[u'(t)]^2 = -\varphi'(t)\left[\frac{u'(t)}{\varphi(t)}\right]^2,$$

из которого следует, что функция $\nu(t)$ при положительности $\varphi'(t)$ монотонно убывает при возрастании t от a до b. Но, поскольку в точках экстремума функции $u(t)$ выполняется условие (2), то, следовательно, максимумы величины $|u(t)|$ монотонно убывают на $[a, b]$. Аналогично, если производная $\varphi'(t)$, отрицательна, то функция $\nu(t)$ возрастает на $[a, b]$ и таким же свойством обладают относительные максимумы величины $|u(t)|$.

Поведение функций Эрмита. Оценим область локализации ф-ий Эрмита — найдём крайние точки перегиба ф-ий. Т.к. n-ая функция Эрмита отвечает уравнению

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_n}{\mathrm{d}t^2} - x^2 f_n = -(2n+1) f_n,$$

$f'' = 0$ в точках $\sqrt{2n+1}$, $-\sqrt{2n+1}$. Покажем, что максимумы $|f_n(x)|$ возрастают при $x > 0$ и убывают при $x < 0$. Для этого применим теорему Сонина к

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_n}{\mathrm{d}t^2} - x^2 f_n = -(2n+1) f_n, \quad -\sqrt{2n+1} < x < \sqrt{2n+1}.$$

тогда $\varphi(x) = 2n+1-x^2$, $\varphi > 0$ при $-\sqrt{2n+1} < x < \sqrt{2n+1}$, $\varphi' < 0$ при $0 < x < \sqrt{2n+1}$ и $\varphi' > 0$ при $-\sqrt{2n+1} < x < 0$ — работает теорема Сонина.